Licence de mathématiques

Liste des unités

Semestre 1

Maths 1

6 ECTS
3h CM
54h TD (cours/TD intégrés)

Contenu :

1. Propositions logiques et opérations logiques élémentaires : connecteurs logiques ET, OU, NON, implication, équivalence.
   Vocabulaire associé à une implication (implication contraposée, négation d'une implication, implication réciproque, propriété caractéristique, condition nécessaire et suffisante, expressions « il faut et il suffit », « il faut », « il suffit », ...).
   Notions de tautologies et contradictions, tautologies classiques.
   Vocabulaire usuel mathématique (définition, théorème, proposition mathématiques, corollaire, lemme, ...).
   Tables de vérité
   Prédicats et propositions logiques avec quantificateurs : quantificateurs universel et existentiel,
   Négation de propositions avec quantificateurs.
   Remarque : ceci n'est pas un chapitre sur la logique, mais une introduction aux raisonnements mathématiques.
2. Ensembles : inclusion, union, intersection, produit cartésien, description par extension.
3. Étude de différents types de raisonnements mathématiques : raisonnements directs, par exhaustion des cas, au cas par cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse, par récurrence simple, par contre-exemple.
4. Applications d'un point de vue ensembliste : injection, surjection, bijection, composition.
5. Utilisation des nombres complexes :
   Cercle trigonométrique : sinus, cosinus, tangente, formules trigonométriques
   Définitions et propriétés : forme algébrique, parties réelle ou imaginaire, conjugué, module, inégalité triangulaire, représentation géométrique, équation du second degré à coefficients réels.
   Équations du second degré à coefficients complexes. Somme et produit des racines.
   Racine carrée d'un nombre complexe.
   Forme trigonométrique et argument d'un nombre complexe non nul. Formules de de Moivre et d'Euler.
   Racines n-ième de l'unité, propriétés. Représentations géométriques.
   Application à la trigonométrie et/ou la géométrie : factorisation et linéarisation d'expressions trigonométriques.
6. Propriété du corps IR des nombres réels : IR est un corps totalement ordonné archimédien, théorème de la borne supérieure (pas de construction de R)
   Inégalités dans IR, valeur absolue, inégalités triangulaires, partie majorée, minorée.

Techniques de majoration et de minoration : cas d'une somme, d'un produit, d'un quotient ; inégalités classiques ; majorer (minorer)

7. Suites réelles : définitions formelles (cette partie fournira un cadre simple pour travailler avec les quantificateurs et écrire des définitions ainsi que des démonstrations rigoureuses)
   Limites, suites monotones (majorées, minorées), suites adjacentes.
8. Relations d'équivalence.
   Exemples : systèmes (à venir), fonctions équivalentes, quelques exemples finis, même image par une application (on ne parlera pas de classes d'équivalence)
9. Systèmes linéaires : Résolution de systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss ; systèmes avec paramètre.

Objectifs pédagogiques :
S'initier au formalisme mathématique du supérieur dans les domaines de la logique mathématique, l'analyse réelle, et l'algèbre.

Prérequis :
Spécialité mathématique de terminale générale

Maths 2

6 ECTS
57h TD (cours/TD intégrés)

Contenu :

1. Calcul matriciel élémentaire, méthode du pivot, matrices échelonnées.
   Indices/calculs de sommes (binôme de Newton...) : linéarité (sommes et sommes doubles), changements indices...
   Matrices inversibles, recherche de l'inverse d'une matrice, calcul du rang.
2. Fonctions sur IR à valeurs réelles :
   a. Rappels : ensemble de définition, minoration, majoration, minimum, maximum, monotonie.
   b. Opérations sur les fonctions, composition (domaine de définition des fonctions composées).
   c. Limites de fonctions en un point et en l'infini (opérations algébriques sur les limites - compositions de limites). Asymptotes horizontales ou verticales.
   d. Continuité.
   e. Fonctions usuelles : cosinus, sinus, tangente (formules trigonométriques), puissances. Fonctions hyperboliques.
   f. Introduction à la dérivabilité d'une fonction. Dérivées des fonctions usuelles et opérations. Quelques démonstrations et des calculs de dérivées.
      On insistera sur la justification de la dérivabilité, en particulier lors de la dérivation de fonctions composées.
   g. Fonctions réciproques : on admet à chaque fois qu'elles sont bijectives et dérivables (l'énoncé et la démonstration du théorème de la bijection seront faits au S2 avec applications en TD).

   h. Croissances comparées. Étude de fonctions (asymptotes obliques).
      Fonctions négligeables, fonctions équivalentes (on donnera les équivalents classiques découlant de la dérivation). Opérations élémentaires : exemples et contre-exemples. Application au calcul de limites.
3. Intégrale de Riemann d'une fonction continue sur un segment : calculs d'intégrales (Intégration par parties, changement de variable).
4. Méthodes de résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 (l'ordre 2 à coefficients constants ne sera pas traité).
5. Loi de composition interne : définition de groupe (neutre, inverse, associativité), commutativité, définition de corps.
   Exemples et contre exemples : fonctions, suites, matrices, fonctions polynomiales, complexes, additions réels, rationnels, corps fini à 2 éléments.

Objectifs pédagogiques :
Poser les bases du formalisme mathématique du supérieur dans les domaines de la logique mathématique, l'analyse réelle, et l'algèbre.

Prérequis :
Spécialité mathématique de terminale générale
Mathématiques 1 du semestre 1

Semestre 2

Espaces vectoriels

6 ECTS
18h CM
39h TD

Contenu :

1. Notion d'espace vectoriel sur un corps IK (cf les 4 exemples de corps du starter). Espaces vectoriels usuels : IK^n, M_n,m(IK), applications d'un ensemble dans E (où E est un espace vectoriel).
2. Sous-espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels engendrés par une famille de vecteurs. Famille libre, famille génératrice, base.
3. Applications linéaires, exemples généraux. Endomorphismes. Noyau et image d'une application linéaire. Forme linéaire, hyperplan.
4. Espaces vectoriels de dimension finie. Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice d'une application linéaire dans une base. Calcul d'une base du noyau, de l'image par la méthode du pivot de Gauss. Théorème du rang.
5. Changement de bases (matrices équivalentes, relation d'équivalence associée).
6. Somme directe de deux sous-espaces (exemples avec des projecteurs, symétries en TD), formule de Grassmann.

Objectifs pédagogiques :
Définir la structure d'espace vectoriel, ainsi que les morphismes entre ces objets. En étudier les propriétés.

Prérequis :
Spécialité mathématique de terminale générale
Mathématiques 1 et Mathématiques 2 du semestre 1

Fonctions et suites

6 ECTS
18h CM
39h TD

Contenu :

1. Suites extraites, théorème de Bolzano-Weierstrass. Suites de Cauchy, complétude de IR.
2. a. Fonctions continues de IR dans IR : définition formelle, lien avec les suites. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue. Théorème de la bijection (applications en TD aux fonctions trigonométriques réciproques).

b. Fonctions dérivables de IR dans IR, dérivabilité de la composition, dérivabilité de la réciproque.
Théorème de Rolle et des accroissements finis, applications (règle de l'Hospital).
Dérivées successives, formule de Leibniz, fonctions convexes (inégalité des pentes, caractérisation par les dérivées premières et secondes, position relative à la tangente, inégalités classiques).
Formules de Taylor-Lagrange et de Taylor-Young.
c. Développements limités. Application aux calculs des limites (et en TD aux études de branches infinies : asymptotes obliques, branches paraboliques, développements asymptotiques…).

Objectifs pédagogiques :
Poursuivre l'étude de l'analyse réelle initiée au semestre 1 via la construction de résultats plus avancés sur les suites et leur convergence, ainsi que sur les fonctions continues et dérivables.

Prérequis :
Spécialité mathématique de terminale générale
Mathématiques 1 et Mathématiques 2 du semestre 1

Semestre 3

Analyse appliquée

6 ECTS
18h CM
30h TD
9h TP

Contenu :

1. Recherche de zéros d'une fonction scalaire d'une variable réelle, notions du cas vectoriel. Théorèmes de Brouwer et de Cauchy sur le point fixe (preuves dans le cas scalaire), méthode du point fixe, de dichotomie, de la sécante et de Newton. Écriture de ces méthodes sous la forme d'algorithmes. Vitesse de convergence, estimation de l'erreur, critères d'arrêt, ordre d'un processus itératif.
2. Éléments de l'étude théorique des équations différentielles ordinaires (EDO) scalaires. Le théorème de Cauchy-Lipschitz est admis. Pour les EDO linéaires de n'importe quel ordre on étudie la structure de l'espace des solutions et le rôle de l'équation homogène associée. La solution générale de l'équation homogène dans le cas de coefficients constants. Problème de Cauchy.
3. Aspects numériques du problème de Cauchy : méthodes d'Euler explicite et implicite, mise en oeuvre, consistance, stabilité (sans preuves), convergence, ordre.
4. Méthodes de résolution exactes des EDO dans les cas suivants :
   a. EDO d'ordre 1 linéaires et non linéaires à variables séparables.
   b. EDO d'ordre 1 résolubles après changement de fonction inconnue : équations de la forme y'(x) = f(y/x), équations de Bernoulli.
   c. EDO scalaires linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.
   d. EDO scalaires linéaires d'ordre 2 réductibles au premier ordre.
   e. Si le temps le permet : Wronskien et méthode de variation de la constante pour l'ordre 2 (à voir systématiquement à l'ordre 1).
5. Mise en pratique sous Python de la méthode de Newton et de la méthode d'Euler.

Objectifs pédagogiques :
Acquérir les notions élémentaires en analyse numérique et équations différentielles.

Prérequis :
Unités de mathématiques du L1.

Entiers, Polynômes et algèbre linéaire

6 ECTS
18h CM
39h TD

Contenu :
A. Arithmétique des entiers et des polynômes en une indéterminée à coefficients dans un corps :
1 - Définition, division euclidienne, divisibilité, pgcd et algorithme d'Euclide. Éléments premiers entre eux, théorème de Bézout, lemme de Gauss. Congruences dans Z.
2 - Nombres premiers, polynômes irréductibles (cas de C[X] et R[X]), lemme d'Euclide. Factorisation unique.
3 - Pour les polynômes :

- Racines, racines multiples, caractérisations, racines et factorisation. Formule de Taylor polynomiale.
- Interpolation de Lagrange.
- Fractions rationnelles, décomposition en éléments simples, méthodes de décomposition.

B. Déterminant :
1 - Formes linéaires sur un espace vectoriel, base duale, hyperplans.
2 - Formes p-linéaires, formes alternées. Introduction au groupe symétrique. Définitions et premières propriétés du déterminant : déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme, d'une matrice carrée, déterminant et volume.
3 - Méthodes de calcul du déterminant.
4 - Applications : inversibilité et inverse d'une matrice, calcul du rang, polynôme caractéristique, éléments propres (approfondis dans les UE du S4), formules de Cramer…

Objectifs pédagogiques :
Acquérir les notions fondamentales sur les entiers, les polynômes et leurs racines. Acquérir des notions intermédiaires d'algèbre linéaire en vue de la réduction des endomorphismes. Savoir les appliquer à différents problèmes mathématiques.

Prérequis :
Les unités mathématiques de L1.

Espaces normés et fonctions vectorielles

6 ECTS
18h CM
39h TD

Contenu :
1) Norme sur un K-espace vectoriel (K=R ou C), distance associée, boules, parties bornées.
Exemples : K^n muni de la norme p (Minkowski admis pour 1<p<infini), B(X,K) muni de la norme infinie, C([a,b]) muni de la norme 1.
Exemple des espaces préhilbertiens réels ou complexes, inégalité de Cauchy-Schwartz.
Norme associée au produit scalaire. Exemples : K^n muni du produit scalaire canonique et C([a,b]) muni de la norme quadratique.
Suites convergentes, de Cauchy, bornées. Continuité des applications entre espaces vectoriels normés, caractérisation séquentielle, applications lipschitziennes.

Ouverts, fermés, stabilités ensemblistes, images réciproques de ces ensembles par les fonctions continues (les notions d'intérieur et d'adhérence ne sont pas au programme de cette UE).
Suites extraites, valeur d'adhérence, parties compactes. Partie fermée d'un compact, tout compact d'un evn (de dimension quelconque) est fermé et borné, image continue d'un compact. Dans R^n muni de la norme infinie, les compacts sont les fermés bornés (la compacité des segments de R est une reformulation d'un résultat vu au S2).
Normes équivalentes, et invariance des propriétés topologiques. Équivalence des normes en dimension finie et applications : caractérisation des compacts, convergence des suites de Cauchy, tout sous-espace de dimension finie est fermé.
2) Dans tout ce qui suit, on se place dans des R-espaces vectoriels normés de dimension finie.
Limite d'une fonction, caractérisation séquentielle, lien avec la continuité. Applications composantes.
Dérivabilité d'une fonction vectorielle de la variable réelle. Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, gradient.
Différentiabilité, lien avec la continuité et les dérivées partielles. Matrice jacobienne, opérations sur les fonctions différentiables. Applications de classe C1 sur un ouvert et lien avec la différentiabilité.
3) Courbes de R^n
Courbes paramétrées, étude locale (tangente, asymptotes).
Tracé de courbes usuelles.
Longueur d'un arc, paramétrisation normale, intégrale curviligne.
Courbure d'un arc en dimensions 2 et 3, repère de Frenet.

Objectifs pédagogiques :
Introduire la topologie des espaces vectoriels normés de dimension finie et étudier ses spécificités.
Appréhender les bases du calcul différentiel en dimension finie et étudier les courbes paramétrées dans R^n.

Prérequis :
Les unités de mathématiques du L1

Intégrales et Séries

6 ECTS
18h CM
39h TD

Contenu :
1) Séries de nombres réels ou complexes
Définitions, convergence et opérations, comportement du terme général (série harmonique), série télescopique. Critère de Cauchy. Exemples des séries géométrique et de Riemann.

Convergence des séries à termes positifs, règles de comparaison, règles de Cauchy et de D'Alembert.
Convergence absolue, produit de Cauchy.
Séries semi-convergentes. Critère des séries alternées et majoration du reste, transformation et théorème d'Abel. Exemples.
2) Intégration de Riemann des fonctions continues par morceaux sur un segment.
Intégrale des fonctions en escaliers.
Approximation (uniforme) des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier.
Définition de l'intégrale d'une fonction réelle continue par morceaux f comme borne sup des intégrales de fonctions en escaliers minorant f.
Propriétés de l'intégrale : linéarité, positivité, relation de Chasles. Extension aux fonctions à valeurs complexes, inégalité triangulaire, cas de nullité de l'intégrale. Sommes de Riemann.
Théorème fondamental du calcul intégral, lien entre calcul intégral et primitives pour les fonctions continues. Applications et rappels : formule d'intégration par parties et du changement de variable, formule de Taylor avec reste intégral. Formules de la moyenne et de Cauchy-Schwarz.
3) Intégration de Riemann généralisée
Définition, cas des intégrales faussement impropres, relation de Chasles, linéarité. Lien avec la convergence de l'intégrande en l'infini. Intégration par parties, changement de variable C1 et bijectif. Critère de convergence de Cauchy.
Convergence des intégrales généralisées de fonctions positives. Comparaison série-intégrale, comparaison asymptotique.
Convergence absolue.
Semi-convergence, critère d'Abel (cas C1) et exemples.

Objectifs pédagogiques :
S'initier à l'intégrale de Riemann (généralisé), aux techniques de calcul intégrale et savoir manipuler les séries numériques.

Prérequis :
Les unités de mathématiques du L1

Techniques mathématiques (option)

3 ECTS
9h CM
6h TD
13,5h TP

Contenu :
Initiation à l'utilisation du langage Python et du logiciel de calcul formel Sage.
_ Notions fondamentales de Python : variables, fonctions, boucles, listes, dictionnaires.
_ Utilisation de modules python, notamment numpy et matplotlib
_ Graphiques en Python (module matplotlib, mais pas exclusivement) : tracer des courbes dans le plan et dans l'espace.

_ Notions d'algorithmique : complexité d'un algorithme (exemple : exponentiation rapide).
_ Initiation à la vectorisation : utilisation du calcul vectorisé avec les fonctions du module numpy pour éviter les boucles inutiles
_ Utilisation de Python, éventuellement en passant par le logiciel Sage, pour illustrer et enrichir des éléments d'algèbre et d'analyse introduits au cours de la première année de licence. Le choix de thèmes peut légèrement varier suivant les besoins spécifiques des étudiants, mais de manière indicative inclut :

- En analyse : études et représentation de fonctions scalaires d'une variable, développements de Taylor, développements asymptotiques, application à l'étude des limites.
- En algèbre : représentation des nombres complexes, racines de l'unité, calcul avec des polynômes, manipulation des matrices et calcul matriciel (produit matrice-vecteur, produit de deux matrices, dimensions, vérification qu'un vecteur donné est solution d'un système linéaire), résolution de systèmes linéaires.

Objectifs pédagogiques :
Initiation à un langage informatique et à l'usage de l'outil informatique pour illustrer, approfondir, tester les connaissances mathématiques acquises pendant la première année de la licence.

Prérequis :
Les unités mathématiques du L1.

Semestre 4

Géométrie affine et euclidienne

6 ECTS
18h CM
39h TD

Contenu :
A. Géométrie affine :
1 - Sous-espaces affines de R^n : points, vecteurs, translation (le formalisme des espaces affines ne sera pas développé dans cette unité). Exemples. Direction d'un sous-espace affine, parallélisme, intersection. Configurations de droites affines et de plans affines en dimension 2 et 3.
2 - Repère cartésien, coordonnées cartésiennes, équations cartésiennes d'un sous-espace affine.
3 - Barycentres, repère affine, coordonnées barycentriques, applications. Notion de convexité.
4 - Applications affines. Translations, homothéties, projections / symétries affines. Écriture matricielle. Quelques théorèmes de géométrie classique dans le plan (ex. : Thalès, Ceva,...).
5 - Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.
B. Espaces euclidiens :
1 - Rappels : produit scalaire, espace euclidien, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme, distance, inégalité de Minkowski (démonstrations vues en S3).
2 - Orthogonalité : définition, base orthonormée, procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, supplémentaire orthogonal, projections orthogonales, symétries orthogonales.
3 - Endomorphismes d'un espace euclidien : adjoint ; endomorphismes et matrices orthogonaux (isométries), endomorphismes et matrices symétriques, et positifs / définis positifs. Diagonalisation des endomorphismes symétriques (en coordination avec l'UE réduction).
4 - Orientation d'un espace vectoriel réel, produit mixte, produit vectoriel, isométries directes et indirectes, mesure des angles.
5 - Classification des isométries euclidiennes en dimension 2 et 3.
6 - Aperçu du cas hermitien : forme hermitienne, produit scalaire hermitien, espace hermitien, adjoint, endomorphismes hermitiens, unitaires, normaux. Diagonalisation des endomorphismes hermitiens (en coordination avec l'UE réduction).

Objectifs pédagogiques :
Acquérir les notions fondamentales sur la géométrie affine dans R^n et les espaces vectoriels euclidiens. Savoir les appliquer à différents problèmes mathématiques.

Prérequis :
Les unités mathématiques de L1 et l'unité "Polynômes et algèbre linéaire" de L2.

Probabilités élémentaires

6 ECTS
18h CM
39h TD

Contenu :
Modélisation d'expériences aléatoires, notion d'événement et notions élémentaires sur les tribus. Espaces de probabilité.
Probabilités conditionnelles et indépendance d'événements.
Définition générale d'une variable aléatoire réelle, d'une loi de probabilité, d'une fonction de répartition.
Application au cas particulier des variables aléatoires réelles discrètes ou admettant une densité. Étude des variables aléatoires réelles classiques.
Espérance et variance d'une variable discrète ou à densité.
Énoncé et premières applications de la loi forte des grands nombres et du théorème limite central.

Objectifs pédagogiques :
Reprendre et compléter les notions de probabilités (expériences aléatoires, événements, variables aléatoires réelles, lois de probabilité, espérance, variance) vues au lycée en précisant le formalisme mathématique et en le développant à l'aide des définitions et des théorèmes vus en analyse et algèbre en L1 et L2.
Faciliter la transition avec les notations et le nouveau formalisme qui seront développés dans les cours de théorie de l'intégration et de la mesure, de calcul des probabilités et de théorie des probabilités en troisième année de licence.
Permettre à l'étudiant de L2 de développer son autonomie et sa méthodologie personnelle en l'incitant à utiliser quelques manuels universitaires de référence.

Prérequis :
Notions de probabilités vues en cours de mathématiques dans les classes à dominante scientifique du lycée. Notions élémentaires sur les fonctions, le calcul intégral et les séries numériques et sur les ensembles vus en L1 et L2 (semestre 3).

Réduction des endomorphismes

6 ECTS
18h CM
39h TD

Contenu :
1 - Diagonalisation et trigonalisation

- Sous-espaces stables, vecteurs propres, valeurs propres, sous-espaces propres.
- Polynôme caractéristique, critère de trigonalisation à l'aide du polynôme caractéristique, critère de diagonalisation à l'aide des multiplicités des valeurs propres et des dimensions des sous-espaces propres.

2 - Polynômes d'endomorphismes, polynômes annulateurs, théorème de Cayley-Hamilton, polynôme minimal, lemme des noyaux, application du polynôme minimal à la diagonalisation.
3 - Réduction des endomorphismes remarquables d'un espace euclidien/hermitien (en coordination avec l'UE géométrie affine et euclidienne) : endomorphismes symétriques et orthogonaux sur R, normaux sur C.
4 - Sous-espaces caractéristiques, endomorphismes nilpotents, décomposition de Dunford sur C, et Jordan si le temps le permet.

Objectifs pédagogiques :
Acquérir des notions fondamentales de réduction d'endomorphismes et décompositions de matrices. Savoir les appliquer à différents problèmes mathématiques.

Prérequis :
Les unités mathématiques de L1 et l'unité "Polynômes et algèbre linéaire" de L2.

Suites et séries de fonctions

6 ECTS
18h CM
39h TD

Contenu :
1) Suites de fonctions
Convergence simple. Contre-exemples au transfert de propriétés par limite simple.
Convergence uniforme, lien avec la convergence simple, lien avec la convergence dans l'espace normé B(X,C) muni de la norme infinie.
Critère de Cauchy uniforme, critère séquentiel.
Préservation de propriétés par convergence uniforme : caractère borné, interversion des limites, continuité, intégrales et primitives, dérivabilité, classe C^k.
Complément possible : théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass
2) Séries de fonctions
Définition : convergence simple, absolue, uniforme. Convergence uniforme et comportement du terme général, des restes.
Critère de Cauchy uniforme, critère uniforme des séries alternées et d'Abel. Application aux séries trigonométriques.
Convergence normale, liens avec les autres types de convergence, contre-exemples.
Convergence uniforme et propriétés de la somme : interversion de limites et d'intégrales, primitives terme à terme, dérivation terme à terme, classe C^k.
3) Séries entières
Lemme d'Abel, rayon de convergence et domaine de convergence simple d'une série entière.
Rayon de convergence : règles de comparaisons, règles de Cauchy, de D'Alembert et formule de Cauchy-Hadamard. Rayon de convergence et opérations (somme, produit, dérivation).
Convergence normale d'une série entière. Continuité de sa somme sur le disque ouvert de convergence, classe C-infinie sur l'intervalle ouvert de convergence.

Fonctions développables en série entière. Opérations, lien avec la série de Taylor, développement en série entière des fonctions usuelles. Fonction exponentielle complexe. Complément possible : inégalités de Cauchy et théorème de Liouville.

Objectifs pédagogiques :
Acquérir et savoir utiliser les notions relatives aux suites et séries de fonctions, décrites ci-dessus. En particulier :
- savoir étudier les différents modes de convergences d'une suite ou d'une série de fonctions,
- connaître les liens avec les propriétés de la limite ou de la somme (continuité, dérivabilité),
- savoir justifier les interversions de limites, les intégrations ou dérivations terme à terme
- savoir utiliser ces notions pour étudier des exemples de suites ou séries de fonctions, notamment les séries trigonométriques et entières,
- connaître les spécificités de l'étude des séries entières (rayon, mode convergence),
- savoir trouver et utiliser des développements en séries entières.

Prérequis :
Unités d'analyse de L1 et "intégrales et séries" au S3

Semestre 5

Analyse numérique (MF – MES – MA)

6 ECTS
21h CM
28,5h TD
7,5h TP

Contenu :
1) Intégration numérique et applications
- Interpolation polynomiale de Lagrange : polynôme d'interpolation de Lagrange d'une fonction en n+1 points, estimation de l'erreur. Comportement lorsque le nombre de points tend vers l'infini, phénomène de Runge
- Méthode d'intégration numérique : formule de quadrature élémentaire et composée, ordre d'une formule de quadrature. Méthode des rectangles, des trapèzes, de Simpson. Estimation de l'erreur. Convergence d'une formule de quadrature composée, ordre de convergence
  Application des méthodes d'intégration numérique à l'obtention de schémas numériques pour les EDO : méthodes d'Euler explicite et implicite
- Polynômes orthogonaux dans L^2_omega(]a,b[) : définition de L^2_omega(]a,b[) et de son produit scalaire (propriétés admise) ; existence d'une suite de polynômes orthogonaux, relation de récurrence, propriété des racines
- Application des polynômes orthogonaux : méthodes d'intégration numérique de Gauss. Existence et unicité d'une méthode d'ordre optimal, exemple des méthodes de Gauss-Legendre.

2) Algèbre linéaire numérique
* compléments d'algèbre linéaire : normes de matrices, normes subordonnées, rayon spectral, conditionnement, perturbation de l'identité
* résolution de systèmes linéaires, méthodes directes : pivot de Gauss, factorisation LU, de Cholesky, QR. Compte d'opérations élémentaires, notion de complexité.
* résolution de systèmes linéaires, méthodes itératives : principe général, exemple des méthodes de Jacobi ou de Gauss-Seidel, analyse de convergence (rayon spectral)
* décomposition en valeurs singulières
* Recherche d'éléments propres : théorèmes de Gershgorine et de Hadamard, lien avec la recherche de racines de polynômes (matrice compagnon) ; méthode de la puissance, méthode QR pour les valeurs propres

Objectifs pédagogiques :
Acquérir des notions d'analyse numérique dans les domaines de l'algèbre linéaire numérique, de l'interpolation polynomiale et de l'intégration numérique, et en particulier :
* connaître les spécificités des méthodes directes et des méthodes itératives pour la résolution de systèmes linéaires
* savoir effectuer le compte d'opérations élémentaires d'une méthode directe, et le comparer à la complexité des algorithmes de référence

* savoir effectuer une étude de convergence d'une méthode itérative
* savoir construire un polynôme d'interpolation d'une fonction en n+1 points, et être conscient des problèmes pouvant survenir lorsque le nombre de points augmente
* comprendre géométriquement les différentes méthodes d'intégration numérique étudiées
* savoir calculer et saisir les enjeux de l'ordre d'une formule de quadrature
* savoir interpréter un ordre de convergence et le retrouver graphiquement sur des simulations
* comprendre et savoir utiliser une majoration d'erreur
* savoir choisir une méthode d'intégration numérique en fonction des objectifs fixés et du contexte
* comprendre les liens entre l'intégration numérique et les schémas numériques pour les équations différentielles

Bibliographie/ressources :
Demailly : Analyse numérique et équations différentielles

Prérequis :
Les unités mathématiques de L1 et de L2.
Maîtrise de l'algorithmique, bases de python

Calcul des probabilités (MES – MA)

6 ECTS
21h CM
36h TD

Contenu :
Modèles probabilistes, espace de probabilité.
Notions élémentaires de théorie de la mesure : convergence monotone, convergence dominée, lemme de Fatou.
Notions de vecteur aléatoire de dimension fini et de loi de probabilité d'un vecteur aléatoire.
Éléments d'intégration de Lebesgue : Espérance, variance et covariance pour des variables aléatoires réelles ; espérance et matrice de covariance d'un vecteur aléatoire; théorème du transfert ; identification de lois. Formule de changement de variable.
Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire.
Exemples des lois classiques.
Indépendance de variables aléatoires réelles. Application à la somme de variables aléatoires indépendantes.
Loi des grands nombres et théorème-limite. Exemples et applications.

Objectifs pédagogiques :
Donner un exposé simple, mais rigoureux, des outils mathématiques dans le langage de la théorie de la mesure nécessaires à la modélisation probabiliste. L'enseignement privilégiera les résultats pratiques et utiles de la théorie en vue de leurs applications concrètes.

Prérequis :
Avoir suivi l'unité "Probabilités élémentaires" de la deuxième année de licence Mathématiques (semestre 4). Connaître les notions classiques vues en cours d'analyse et d'algèbre en L1 et L2 (intégration et dérivation, intégrales généralisées, séries numériques, séries entières, calcul matriciel, dénombrements, notations et opérations ensemblistes)

Espaces métriques (MF – MES – MA)

6 ECTS
21h CM
36h TD

Contenu :
Espaces métriques, ouverts, fermés, adhérence, intérieur, distances équivalentes, liens avec les suites (valeurs d'adhérence). Produit fini d'espaces métriques. Topologie induite sur une partie.
Applications continues, uniformément continues, lipschitziennes, homéomorphismes.
Rappels sur les espaces vectoriels normés (sur R ou C), topologie associée, normes équivalentes. Applications linéaires continues, norme d'une telle application, espace vectoriel normé L(E,F),
Espaces métriques complets, espaces de Banach, suites et séries dans les espaces vectoriels normés.
Exemples et applications : B(X,E) muni de la norme infinie (E Banach), L(E,F) avec F Banach, Gl(E) est un ouvert dense de L(E), espaces l^p (inégalités de Hölder et Minkowski démontrées en S6). Théorème du point fixe pour les applications contractantes, prolongement des applications uniformément continues.
Espaces métriques compacts, propriétés de Bolzano-Weierstrass et Borel-Lebesgue, produit fini ou dénombrable de compacts. La compacité et l'équivalence des normes en dimension finie ont été vues en S3.
Fonctions continues sur un compact : théorème de Heine, image continue d'un compact, homéomorphisme entre compacts, Banach C(K).
Connexité, fonction continue sur un connexe, composantes connexes, connexité par arcs.
Exemples : connexes de R, convexes et ouverts connexes d'un espace normé.

Objectifs pédagogiques : Acquérir les notions élémentaires relatives aux espaces métriques.
Prérequis : les unités de mathématique de L1 et L2

Groupes (MF – MES)

6 ECTS
21h CM
36h TD

Contenu :

Groupes : définitions et premières propriétés, morphismes de groupes, sous-groupes, générateurs.
Groupes monogènes et cycliques, fonction puissance, ordre des éléments, des sous-groupes, théorème de Lagrange, produits directs.
Sous-groupes distingués d'un groupe, groupe quotient, sous-groupes c'est groupes quotient, théorèmes d'isomorphie. Produits semi-directs, groupes diédraux.
Actions de groupes : définitions et premières propriétés, actions transitives, libres, fidèles, exemples. Formule des classes. Cas des p-groupes et théorèmes de Sylow. Généralités sur les groupes symétriques, groupes symétriques des ensembles finis, décomposition en produit de cycles, signature d'une transposition. Lien entre action de groupes et groupes symétriques. Exemples d'action de groupe en géométrie plane ou en petite dimension.
Lien entre action de groupe et produit semi-direct.

Objectifs pédagogiques : apprendre la notion de groupe et les différentes constructions liées à cette notion.

Prérequis : les unités d'algèbre du L2

Intégration (MF)

6 ECTS
21h CM
36h TD

Contenu :
1) Mesurabilité : espace mesurable, tribu, tribu borélienne, applications mesurables.
2) Mesures : espace mesuré, exemples de mesure ; mesure de Lebesgue, mesures de Dirac, mesure de décompte ; ensembles négligeables, convergence presque partout.
3) Intégration des fonctions mesurables positives ; théorème de convergence monotone de Beppo-Lévi, lemme de Fatou.
4) Intégration des fonctions mesurables de signe quelconque : espace L1 ; théorème de convergence dominée ; convergence en norme, en mesure, presque partout. Classe des fonctions Riemann intégrables sur un segment (rappels de l'UE « intégrales et séries » et approfondissements) et lien avec l'intégrale de Lebesgue.
5) Intégrale dépendant d'un paramètre : théorèmes de continuité et de dérivation.
6) Produit d'espaces mesurés, théorèmes de Tonelli et Fubini.
7) Mesure à densité, mesure image, théorème du transfert ; théorème de changement de variable dans Rn.
Remarque : Les espaces Lp sont étudiés dans l'unité "espaces fonctionnels" du S6.

Complément possible : construction de la mesure de Lebesgue.

Objectifs pédagogiques :
Maîtriser les notions élémentaires concernant l'intégration de Lebesgue tant d'un point de vue théorique que pratique. En particulier :
- savoir manipuler les mesures classiques (mesure de Lebesgue sur R et mesure de décompte

sur N),
- savoir reconnaître les intégrales usuelles et les séries comme des situations d'utilisation de la théorie de l'intégrale de Lebesgue,
- savoir prouver l'intégrabilité au sens de Lebesgue de fonctions explicites,
- savoir utiliser les théorèmes de convergence pour justifier soigneusement les interversions limites-intégrales,
- être capable d'étudier rigoureusement des fonctions définies par une intégrale,
- savoir justifier les calculs d'intégrales multiples,
- savoir utiliser les changements de variables dans les calculs d'intégrales.

Prérequis :
Unités "intégrales et séries" au S3 et "suites et séries de fonctions" au S4

Statistiques élémentaires (MA – Pluri)

6 ECTS
24h CM
33h TP

Contenu :
1) Apprendre les premiers outils (graphiques, indicateurs) qui permettent de résumer l'information que porte un échantillon statistique.
2) Au moyen de l'exemple du tirage dans une population, comprendre les lois de probabilités mises en jeu.
3) Dans ce cadre, aborder pour la première fois la notion d'inférence statistique : préciser mathématiquement la notion intuitive d'un échantillon représentatif de la population. Intervalles de confiance, fluctuations d'échantillonnage, applications du théorème central limite.
4) Loi normale : notion d'échantillon gaussien, contexte d'utilisation, méthodes statistiques spécifiques à ce modèle
5) Méthodes de simulations et techniques de Monte-Carlo
6) Mise en pratique de toutes ces notions en TP informatique sous R

Objectifs pédagogiques :
Cette unité a pour but d'être une introduction et une culture de base à la statistique descriptive et inférentielle. Ces outils et concept s'utilisent aussi bien dans la vie quotidienne que dans un milieu professionnel.

Prérequis :
l'UE "Probabilité élémentaire" du semestre 4.

Techniques mathématiques (Pluri - option)

3 ECTS
9h CM
6h TD
13,5h TP

Contenu :
Consolidation de l'utilisation du langage Python et du logiciel de calcul formel Sage.
Utilisation de Python, éventuellement en passant par le logiciel Sage, pour illustrer et enrichir des éléments d'algèbre et d'analyse introduits au cours de la deuxième année de licence. Le choix de thèmes peut légèrement varier suivant les besoins spécifiques des étudiants, mais de manière indicative inclut :

- En analyse : études de fonctions vectorielles, courbes et surfaces dans l'espace, étude qualitative des solutions d'équations différentielles, systèmes d'équations différentielles linéaires.
- En algèbre : racines de polynômes, manipulation des matrices et calcul matriciel, réduction de matrices, valeurs propres, vecteurs propres, recherche du polynôme minimal, projection orthogonale sur un sous-espace.

Utilisation du calcul vectorisé avec les fonctions du module numpy pour éviter les boucles inutiles

Objectifs pédagogiques :
Initiation à un langage informatique et à l'usage de l'outil informatique pour illustrer, approfondir, tester les connaissances mathématiques acquises pendant la deuxième année de la licence.

Prérequis :
Les unités mathématiques du L1 et du L2.

Semestre 6

Anneaux (MES – option MF)

6 ECTS
21h CM
36h TD

Contenu :
- Anneau (commutatif), groupe des inversibles, sous-anneau. Anneau intègre, corps.
- Idéaux et opérations sur les idéaux. Idéaux et anneaux principaux. Idéaux premiers et maximaux.
- Morphisme d'anneaux, noyau, image.
- Anneau de polynômes et sa propriété universelle. Corps des fractions d'un anneau intègre.
- Quotient d'un anneau par un idéal. Factorisation des morphismes. Caractéristique d'un anneau.
- Produit d'anneaux. Lemme chinois général et dans un anneau principal.
- Cyclicité de (Z/pZ)^* pour p premier, structure de (Z/nZ)^*.
- Anneau factoriel, notions de pgcd et ppcm.
- Arithmétique dans les anneaux factoriels et principaux.
- Contenu d'un polynôme, théorème de transfert de Gauss. Critères d'irréductibilité pour les polynômes (Eisenstein, réduction). Anneaux euclidiens.

Objectifs pédagogiques :
Découvrir et approfondir les connaissances de bases sur les anneaux.

Prérequis :
Unité Algèbre 1 du semestre 5

Calcul différentiel (MF – MES – MA)

6 ECTS
21h CM
36h TD

Contenu :
1) Différentielle d'une application- rappels et généralisations.
Définition, différentielles classiques : linéaire, bilinéaire. Applications de classe C1.
Théorèmes des accroissements finis. Application : convergence des suites et séries de fonctions différentiables
2) Différentielle d'ordre supérieur. Définition, propriétés. Applications de classe Ck.
Dérivées partielles secondes, théorème de symétrie de Schwarz. Extension à l'ordre quelconque.
Formules de Taylor.

Extrema libres.
3) Difféomorphismes.
Homéomorphisme et difféomorphisme (définitions, Ck-difféomorphisme, caractérisation)
Théorème d'inversion locale.
Différentielles partielles, théorème des fonctions implicites.
Théorème des multiplicateurs de Lagrange pour les extrema liés.

Objectifs pédagogiques :
Acquérir des connaissances avancées en calcul différentiel et ses applications aux extrema et aux difféomorphismes.

Prérequis :
Unités de mathématiques de L1, L2 et UE "espaces métriques"

Discrétisation des EDP (MA)

6 ECTS
18h CM
19,5h TD
19,5h TP

Contenu :
I Schémas numériques pour les EDO :
- lien avec l'intégration numérique ;
- schémas d'Euler explicite et implicite, de Crank-Nicolson ;
- erreur de consistance ;
- la forme générale de méthodes de Runge-Kutta ; la méthodes de Runge-Kutta classique d'ordre 4 ;
- théorème de convergence pour les méthodes à 1 pas

II Méthode des différences finies pour des problèmes aux limites en dimension un :
- l'équation de Laplace ;
- approximations de la dérivée première et de la dérivée seconde ;
- principe d'un schéma aux différences finies, écriture matricielle d'un problème discrétisé, prise en compte des conditions aux limites;
- outils d'algèbre linéaire pour l'étude des systèmes matriciels associés ;
- consistance, stabilité, convergence.

III Méthode des différences finies pour des problèmes d'évolution :
- l'exemple de l'équation de la chaleur.
- discrétisation en espace et en temps
- consistance, stabilité, convergence, ordre.

Tout ce qui précède sera mis en pratique sous scilab ou python

Objectifs pédagogiques :
Se familiariser avec les méthodes numériques pour les équations différentielles et leur mise en œuvre

Prérequis :
Unité Analyse numérique du semestre 5

Dualité et formes quadratiques (option MF)

6 ECTS
21h CM
36h TD

Contenu :
Dualité en dimension finie :
1 - Formes linéaires d'un espace vectoriel, dual d'un espace vectoriel, base duale, bidual.
2 - Orthogonalité au sens de la dualité, dimension de l'orthogonal, hyperplans, équations d'un sous-espace vectoriel.
3 - Transposée d'une application et interprétation matricielle, matrice de passage entre bases duales.
Formes quadratiques :
1 - Formes multilinéaires, forme déterminant. Formes bilinéaires, formes bilinéaires symétriques, écriture matricielle, formule de changement de base pour les formes bilinéaires. Forme quadratique, forme polaire.
2 - Noyau, non-dégénérescence, rang d'une forme quadratique. Orthogonalité, isotropie.
3 - Base orthogonale, décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés. Classification des formes quadratiques sur C. Formes quadratiques réelles (définies) positives, (définies) négatives ; théorème d'inertie de Sylvester, signature, classification des formes quadratiques sur R. Discriminant, classification des formes quadratiques sur Z/pZ avec p premier.
4 - Formes quadratiques sur un espace euclidien. Lien avec les endomorphismes symétriques. Signature et signe des valeurs propres, réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive.
5 - Groupes orthogonal et spécial orthogonal d'une forme quadratique. Symétries, réflexions, renversements orthogonaux. Générateurs des groupes orthogonal et spécial orthogonal. Cas du groupe orthogonal réel.

Objectifs pédagogiques :
Acquérir des notions avancées d'algèbre linéaire et des notions fondamentales d'algèbre bilinéaire. Savoir les appliquer à différents problèmes mathématiques.

Prérequis :
Les unités d'algèbre de L1 et L2 ; l'unité "Algèbre 1" de L3.

Espaces fonctionnels (MF)

6 ECTS
21h CM
36h TD

Contenu :
Initiation aux espaces normés de dimension infinie via l'étude d'espaces fonctionnels : espaces lp et Lp, espaces de fonctions continues et espaces de Hilbert.
1) Introduction aux espaces vectoriels normés de dimension infinie
Premiers exemples et rappels : espaces de suites (c0, lp), inégalité de Hölder dans lp, espaces de fonctions bornées, espaces de fonctions continues sur un compact.
Théorème de Riesz.
Applications linéaires continues, calculs de normes. Applications : Exp(u) et inverse de I+u.
Formes linéaires continues, espace dual, duaux de c0 et lp.

2)Espaces Lp
Inégalités de Hölder et Minkowski. Fonctions nulles presque partout, espaces Lp.
Convergence de suites de fonctions mesurables : presque partout, en mesure, dans Lp.
Théorème de convergence dominée dans Lp. Complétude de Lp.
Résultats de densité. Densité des fonctions continues à support compact dans Lp(R), des polynômes dans Lp([a,b]) et des polynômes trigonométriques dans Lp(2pi) (énoncé du théorème de Weierstrass et de sa version trigonométrique).
Dualité dans Lp. Les éléments de Lq vus comme formes linéaires continues sur Lp lorsque p et q sont des exposants conjugués. Enoncé du théorème de Riesz.

3)Espaces de Hilbert réels ou complexes
Rappels sur les espaces préhilbertiens. Espace L2.
Projection sur un convexe fermé, projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.
Bases hilbertiennes (cas séparable), Bessel-Parseval, procédé de Gram-Schmidt. Exemples de bases hilbertiennes (base trigonométrique dans L2(2pi), bases de polynômes orthogonaux).
Théorie L2 des séries de Fourier.
Dual d'un espace de Hilbert (théorème de représentation de Riesz). Cas de L2. Opérateur adjoint.
Application à la dualité de Lp (1<P<2 et mesure finie).

4) Compléments sur les séries de Fourier
Série de Fourier d'une fonction périodique localement intégrable. Lemme de Riemann Lebesgue. Noyaux de Dirichlet et Féjer.
Théorème de Féjer pour les fonction continues périodiques.
Convergence ponctuelle des séries de Fourier : théorème de Dirichlet. Cas de convergence normale.

Objectifs pédagogiques :

Acquérir les connaissances et compétences suivantes concernant les espaces fonctionnels.
_Être familier des exemples suivants d'espaces fonctionnels : espaces de suites (c0, lp), espaces de fonctions bornées et espaces de fonctions continues sur un compact.
_Savoir mettre en œuvre certains arguments routiniers permettant d'établir que des espaces fonctionnels sont des Banach.
_Savoir montrer qu'une application linéaire est continue et calculer sa norme.
_Savoir déterminer si une « fonction » est élément de Lp et savoir calculer ou estimer sa norme (grâce à l'inégalité de Hölder notamment).
_Connaître les relations d'inclusions entre espaces de suites lp et lq, et espaces Lp et Lq lorsque la mesure est finie.
_Savoir mettre en oeuvre le théorème de convergence dominée dans Lp pour établir la convergence d'une suite de L^p.
_Connaître et savoir utiliser (les liens entre) les différents modes de convergence de suites de fonctions mesurables.
_Connaître différentes parties denses dans les espaces Lp et savoir les utiliser dans des raisonnements par densité.
_Savoir identifier les éléments de Lq à des formes linéaires continues sur Lp quand p et q sont deux exposants conjugués. Connaitre l'énoncé du théorème de Riesz sur Lp.
_Être familier des exemples fondamentaux suivants d'espaces de Hilbert : espaces L2 généraux, espace de suites l2, L2(R), espace L2 de fonctions 2pi-périodiques et être capable d'en donner des bases hilbertiennes.
_Savoir majorer grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et exploiter le cas d'égalité.
_Savoir utiliser l'orthogonalité dans différentes situations : pour calculer des distances (théorème de Pythagore), pour décomposer l'espace (supplémentaire orthogonal d'un sous-espace fermé), pour démontrer une densité.
_Savoir utiliser les différentes caractérisations de la projection sur un convexe fermé : distance minimale au convexe, propriété d'angle obtus ou d'orthogonalité dans le cas d'un sous-espace fermé.
_Savoir exploiter une base hilbertienne pour décomposer (ou définir) un vecteur du Hilbert et y écrire sa norme (théorème de Parseval).
_Savoir mettre en œuvre le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Savoir illustrer l'algorithme de construction en termes géométriques.
_Savoir représenter les formes linéaires continues sur un Hilbert (théorème de représentation de Riesz).
_Savoir appliquer la théorie hilbertienne générale aux séries de Fourier (convergence dans L2, égalité de Parseval).
_Savoir calculer les coefficients de Fourier d'une fonction localement intégrable périodique et étudier les convergences ponctuelle et normale de la série de Fourier.

Prérequis :
Unités de mathématiques de L1 et de L2, UE « Espaces métriques » et « Intégration » de L3

Histoire des mathématiques (MES – Pluri)

6 ECTS
18h CM
18h TD

Contenu :
Cette unité propose de fournir le cadre historique du développement des sciences mathématiques telles qu'elles ont été présentées au lycée et dans les deux premières années
de licence. Elle devrait permettre de révéler les liens qu'entretiennent les disciplines mathématiques entre elles, ainsi que ceux que les mathématiques entretiennent avec les autres sciences. Une histoire des idées peut aussi permettre de motiver l'introduction des objets et des modes de raisonnements propres aux mathématiques récentes. Le ou les intervenants pourront consacrer tout ou partie de l'unité à un sujet particulier. Le contenu dépendra donc largement des intervenants et pourra fortement évoluer d'une année à l'autre.

Voici un exemple de sujet possible: « La pensée mathématique de l'espace ».
- Les approches pythagoricienne et éléate au problème philosophique de l'espace.
- Les Éléments d'Euclide et les Sphériques de Ménélaos.
- La géométrie non euclidienne.
- Les surfaces courbes.
- L'axiomatique formelle de la géométrie.
- L'espace-temps.

Objectifs pédagogiques :
Donner des éclairages historiques sur la construction des concepts scientifiques que l'étudiant a rencontrés au cours de son cursus universitaire, afin d'amener l'étudiant à réfléchir sur le mode d'élaboration des connaissances.

Bibliographie / ressources :
* Abrégé d'histoire des mathématiques 1700¿1900. Éd. Jean Dieudonné. Paris : Hermann, 1978.
* Amy Dahan-Dalmédico et Jeanne Peiffer. Routes et dédales : histoire des mathématiques. Paris, Montréal : Études vivantes, 1982.
* Euclide d'Alexandrie. Les Éléments. Bibliothèque d'histoire des sciences. Traduction et commentaires par Bernard Vitrac. Paris : Presses universitaires de France, 1990-2001.
* David Hilbert. Les fondements de la géométrie. Monographies universitaires de mathématiques. Édition critique avec introduction et compléments préparée par Paul Rossier. Paris : Dunod, 1971.
* Victor J. Katz. A history of mathematics : an introduction. Troisième édition. Boston, San Francisco, London, etc. : Addison-Wesley, 2009.
* Árpád Szabó. L'aube des mathématiques grecques, Vrin, Paris, 2000.

Informatique numérique (MA)

6 ECTS
39h TD
18h TP

Contenu :
- Introduction à la programmation en C++ (sans classe) : types de bases, opérateurs, structures de contrôle, structures, pointeurs, références, fonctions, tableaux statiques, allocations dynamiques, gestion de fichiers, programmation modulaire
- Introduction à l'algorithmique : algorithmes classiques (tris par insertion, par fusion), analyse d'algorithmes (invariants de boucle, notion de complexité).

Objectifs pédagogiques :
Acquérir les fondamentaux de la programmation impérative, acquérir des bases d'algorithmique.

Statistiques inférentielles (MES – MA)

6 ECTS
18h CM
39h TD

Contenu :
Statistiques et estimateurs (maximum de vraisemblance et méthode des moments), qualité d'un estimateur, risque associé à un estimateur.
Inégalité de Cramer-Rao, estimateurs efficaces
Comportement asymptotique des estimateurs. Convergence de l'estimateur du maximum de vraisemblance
Famille exponentielle
Estimation par intervalle de confiances, d'une moyenne, d'une proportion, d'une variance, d'un paramètre d'une loi par fonction pivotale, méthode delta.

Objectifs pédagogiques :
Se familiariser avec différentes notions et techniques de la statistique inférentielle.

Prérequis :
Un des modules "Calcul des Probabilités" ou "Intégration" du semestre 5.

Théorie des probabilités (MF)

6 ECTS
21h CM
36h TD

Contenu : Modèles probabilistes, espace de probabilité.
Notions de vecteur aléatoire de dimension fini et de loi de probabilité d'un vecteur aléatoire.
Espérance, variance et covariance pour des variables aléatoires réelles.
Identification de lois. Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire. Exemples des lois classiques.
Indépendance stochastique. Application à la somme de variables aléatoires indépendantes.
Lemme de Borel Cantelli.
Notions de convergence stochastique
Loi des grands nombres.
Théorème-limite central.

Objectifs pédagogiques :
Donner un exposé rigoureux, des outils mathématiques dans le langage de la théorie de la mesure nécessaires à la modélisation probabiliste.

Prérequis :
Avoir suivi l'unité "Intégration de Lebesgue" en L3 (semestre 5).